

11. STEREOMETRIA

Oznaczenia stosowane w stereometrii:

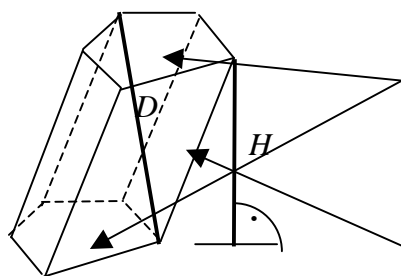
P_c - pole powierzchni całkowitej bryły

P_p - pole podstawy bryły

P_b - pole powierzchni bocznej bryły

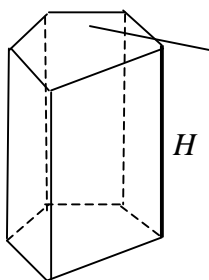
V - objętość bryły

11.1. Graniastosłupy



Podstawy graniastosłupa - dwa równoległe i przystające wielokąty

Ściana boczna - równoległobok



Graniastosłup prosty – graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw. W graniastosłupie prostym wszystkie ściany boczne są prostokątami.

Graniastosłup, który nie jest prosty nazywamy graniastosłupem pochyłym

Przekątna graniastosłupa D – odcinek łączący dwa wierzchołki nie leżący na żadnej ze ścian.

Wysokość graniastosłupa H – odcinek łączący podstawy, prostopadły do nich. W graniastosłupie prostym wysokość jest równa krawędzi bocznej

Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup, którego podstawy są wielokątami foremnymi, a ściany boczne prostokątami.

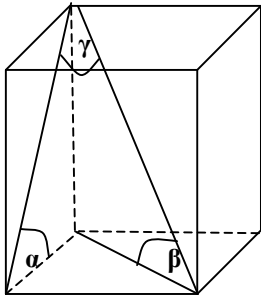
Wzory na pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = P_p \cdot H$$

Kąty w graniastosłupie

Graniastosłup prawidłowy czworokątny

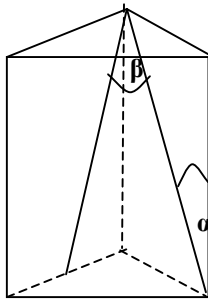


α – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy

β – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do podstawy

γ – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do ściany bocznej

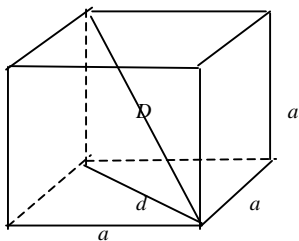
Graniastosłup prawidłowy trójkątny



α – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi bocznej

β – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej

a) **Sześcian** (graniastosłup foremny) – graniastosłup, którego wszystkie ściany są kwadratami.



a - krawędź sześcianu

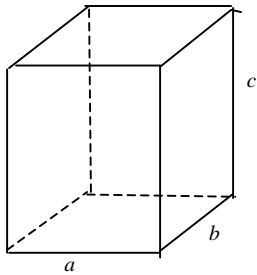
D - przekątna sześcianu $D = a\sqrt{3}$

d - przekątna ściany sześcianu $d = a\sqrt{2}$

Wzór na pole powierzchni całkowitej sześcianu: $P_c = 6a^2$

Wzór n objętość sześcianu: $V = a^3$

b) **Prostopadłościan** – graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.



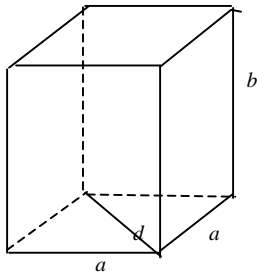
a, b, c – krawędzie prostopadłościanu

Wzór na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

Wzór na objętość prostopadłościanu: $V = a \cdot b \cdot c$

c) **Graniastosłup prawidłowy czworokątny** – graniastosłup, którego podstawy są kwadratami, a ściany boczne prostokątami.



a - krawędź podstawy

b - krawędź boczna (wysokość graniastosłupa)

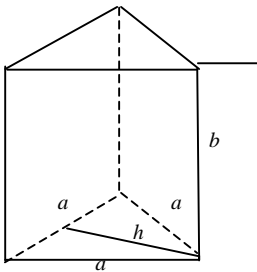
d - przekątna podstawy $d = a\sqrt{2}$

Wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego

czworokątnego: $P_c = 2a^2 + 4ab$

Wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego: $V = a^2 \cdot b$

d) **Graniastosłup prawidłowy trójkątny** – graniastosłup, którego podstawy są trójkątami równobocznymi, a ściany boczne są prostokątami.



a - krawędź podstawy

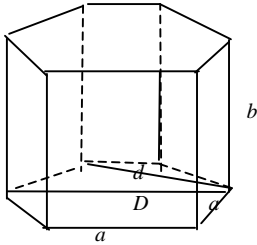
b - krawędź boczna (wysokość graniastosłupa)

h - wysokość podstawy $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego: $P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ab$

Wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b$

e) **Gnaniastosłup prawidłowy sześciokątny** – gnaniastosłup, którego podstawami są sześciokąty foremne, a ściany boczne są prostokątami.



a - krawędź podstawy
 b - krawędź boczna (wysokość gnaniastosłupa)
 d - krótsza przekątna podstawy $d = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 D - dłuższa przekątna podstawy $D = 2a$

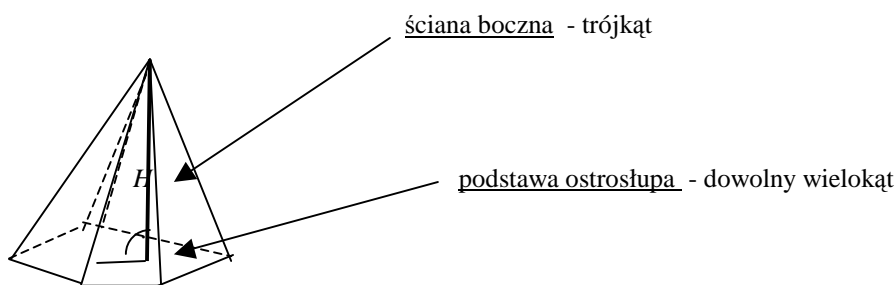
Wzór na pole powierzchni gnaniastosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$P_c = 2 \cdot 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6ab$$

Wzór na objętość gnaniastosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$V = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot b$$

11.2 Ostrosłupy



Wysokość ostrosłupa H – odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy, prostopadły do podstawy

Czworościan - ostrosłup trójkątny (podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt).

Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

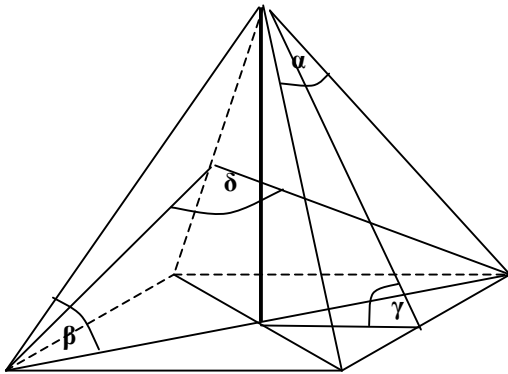
Wzory na pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

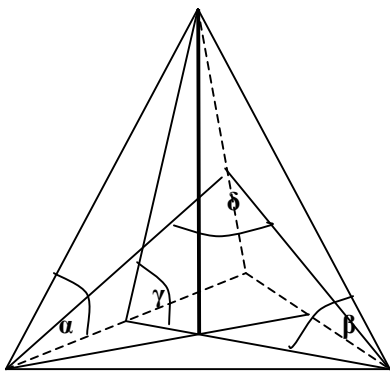
Kąty w ostrosłupie

Ostrosłup prawidłowy czworokątny



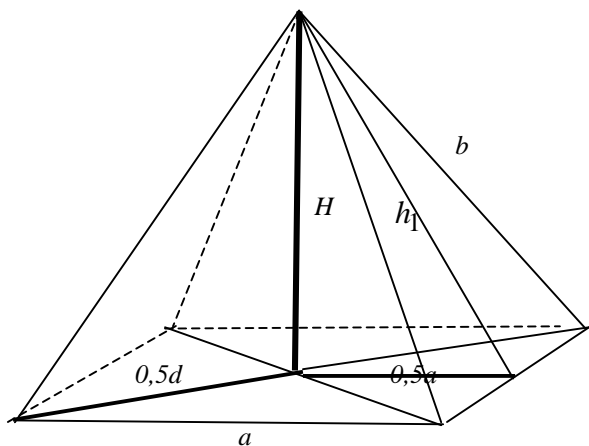
α – kąt płaski przy wierzchołku
 β – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
 γ – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
 δ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi

Ostrosłup prawidłowy trójkątny



α – kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy
 β – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
 γ – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
 δ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi

a) **Ostrosłup prawidłowy czworokątny** – ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

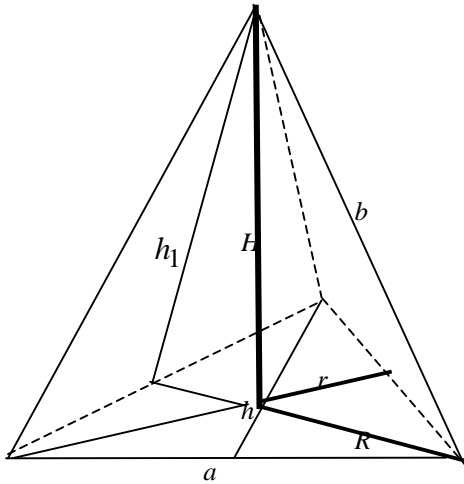


a – krawędź podstawy
 b – krawędź boczna
 h_1 – wysokość ściany bocznej
 H – wysokość ostrosłupa
 d – przekątna podstawy $d = a\sqrt{2}$

Wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego: $P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego: $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$

b) **Ostrosłup prawidłowy trójkątny** – ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.



a – krawędź podstawy

b - krawędź boczna

h_1 - wysokość ściany bocznej

H – wysokość ostrosłupa

h – wysokość podstawy $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

r – promień okręgu wpisanego w podstawę

$$r = \frac{1}{3}h \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

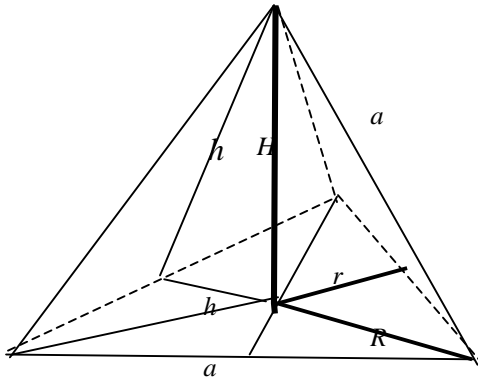
R – promień okręgu opisanego na podstawie

$$R = \frac{2}{3}h \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego: $P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

c) **Czworościan foremny** – ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



a – krawędź czworościanu

H – wysokość czworościanu $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

h – wysokość ściany $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

r – promień okręgu wpisanego w ścianę

$$r = \frac{1}{3}h \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

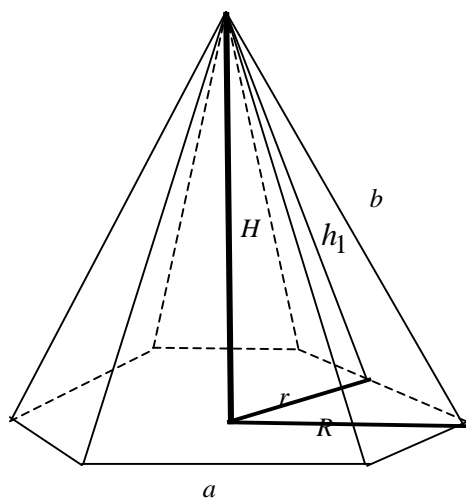
R – promień okręgu opisanego na ścianie

$$R = \frac{2}{3}h \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego: $P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Wzór na objętość czworościanu foremnego: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

d) **Ostrosłup prawidłowy sześciokątny** – ostrosłup, którego podstawą jest sześciokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.



a – krawędź podstawy

b - krawędź boczna

h_1 - wysokość ściany bocznej

H – wysokość ostrosłupa

r – promień okręgu wpisanego w podstawę

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

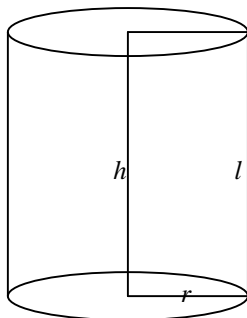
R – promień okręgu opisanego na podstawie $R = a$

Wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego: $P_c = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$

Wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

11.3. Bryły obrotowe

a) **Walec** – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta dokoła prostej zawierającej jeden z jego boków

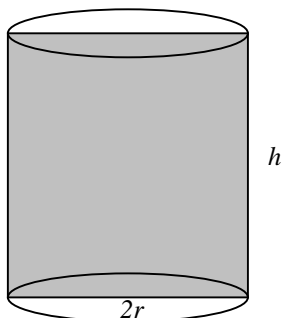


r – promień podstawy walca

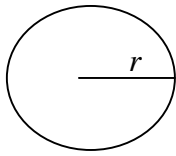
h – wysokość walca

l – tworząca walca $l = h$

Przekrój osiowy walca – prostokąt o bokach h i $2r$



Podstawa walca - koło o promieniu r



$$P_p = \pi \cdot r^2$$

Powierzchnia boczna walca – prostokąt o bokach h i $2\pi r$

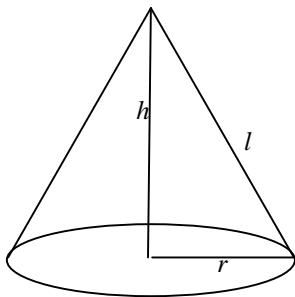


$$P_b = 2\pi \cdot r \cdot h$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

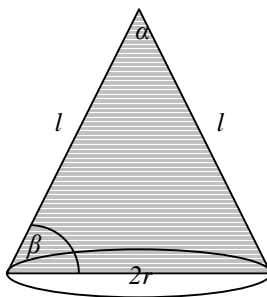
Wzór na objętość walca: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

b) **Stożek** – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dokoła jednej z przyprostokątnych



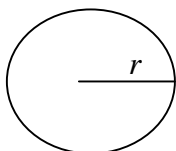
r – promień podstawy stożka
 h – wysokość stożka
 l – tworząca stożka

Przekrój osiowy stożka – trójkąt równoramienny o podstawie $2r$ i ramieniu l



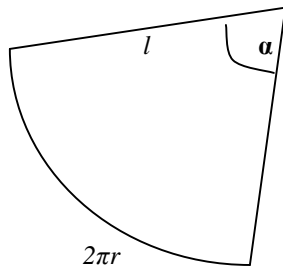
α – kąt rozwarcia stożka
 β – kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy

Podstawa stożka - koło o promieniu r



$$P_p = \pi \cdot r^2$$

Powierzchnia boczna stożka – wycinek koła o promieniu l , oparty na łuku długości $2\pi r$



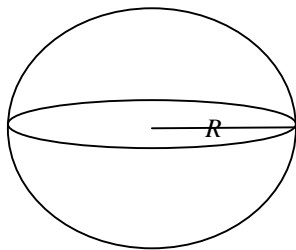
$$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi \cdot l^2$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej stożka $P_c = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$

Wzór na objętość stożka $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

c) **Kula** – bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu koła dookoła jego średnicy



R – promień kuli

Wzór na pole powierzchni kuli $P_c = 4\pi \cdot R^2$

Wzór na objętość kuli: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

Sfera – powierzchnia kuli

Koło wielkie – przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.